MA2 – příklady k přednášce 4.3.2020

1. Je dána rovnice $y'' + py' + qy = 0$, (*)
   kde charakteristická rovnice
$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$
   má komplexní kořeny $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Ukažme, že funkce
$$y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x \quad \text{a} \quad y_2(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$$
tvoří fundamentální systém řešení dané rovnice:

(i) $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ je řešení rovnice (*) (analogicky se ukáže, že i $y_2(x)$ řeší rovnici (*)):
$$y_1'(x) = \alpha e^{\alpha x}\cos\beta x - \beta e^{\alpha x}\sin\beta x,$$
$$y_1''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}\cos\beta x - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \alpha\beta e^{\alpha x}\sin\beta x - \beta^2 e^{\alpha x}\cos\beta x$$

a dosadíme do (1) (a „uspořádáme")

$$\underline{e^{\alpha x}\left[\cos\beta x\,(\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q) + \sin\beta x\,(-2\alpha\beta - p\beta)\right] = 0},$$

neboť, je-li $(\alpha+i\beta)$ kořenem charakteristické rovnice, platí, že
$$(\alpha+i\beta)^2 + p(\alpha+i\beta) + q = 0, \text{ tj.}$$
$$\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i + p\alpha + p\beta i + q = 0,$$
tedy $\quad (\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q) + i\,(2\alpha\beta+p\beta) = 0 \iff$

$\iff \underline{\alpha^2-\beta^2+p\alpha+q=0}$ a také $\underline{2\alpha\beta+p\beta=0}$ (cbd)

2. Dále – řešení nehomogenní rovnice – variace konstant

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-2x}$$ – obecné řešení ?

1) řešení homogenní rovnice

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

ch. r. $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$,

tj. $y_H(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$, $x \in R$, $c_1, c_2 \in R$

2) řešení „celé" rovnice (tj. s pravou stranou $f(x) = e^{-2x}$) metodou variace konstant:

$y(x) = c_1(x) e^{x} + c_2(x) e^{-3x}$, „hledáme" $c_1(x), c_2(x)$:

pro $c_1'(x), c_2'(x)$ dostáváme soustavu rovnic

$$c_1'(x) e^{x} + c_2'(x) e^{-3x} = 0 \qquad (1)$$

$$c_2'(x) e^{x} - 3c_2'(x) e^{-3x} = e^{-2x} \qquad (2)$$

Řešení: (1)–(2): $4 c_2'(x) e^{-3x} = -e^{-2x}$ a odtud

$c_2'(x) = -\frac{1}{4} e^{x}$, tedy $c_2(x) = -\frac{1}{4} e^{x} + C_2$, $C_2 \in R$

pak z (1): $c_1'(x) = -c_2'(x) e^{-3x} \cdot e^{-x} = \frac{1}{4} e^{x} \cdot e^{-3x} \cdot e^{-x}$

$= \frac{1}{4} e^{-3x}$ a tedy

$$c_1(x) = -\frac{1}{12} e^{-3x} + C_1, \quad C_1 \in R$$

Potom $y(x) = c_1(x)e^{x} + c_2(x)e^{-3x}$, tedy

$$y(x) = \left(-\frac{1}{12}e^{-3x}+c_1\right)\cdot e^{x} + \left(-\frac{1}{4}e^{x}+c_2\right)e^{-3x}, \text{ tj.}$$

$$\underline{y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-3x} - \frac{1}{3}e^{-2x}, \quad x\in R,\ c_1,c_2\in R}$$

(a odtud je i patrný „výsledek z LA“: –

– $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$ –

kde $\underline{y_p(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x}}$ a $\underline{y_H(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}, \ x\in R}$

(také tedy stačí variací konstant najít jedno řešení nehomogenní rovnice (např. pro $c_1=c_2=0$))

3. „Odhad“ partikulárního řešení – „metoda odhadu“

(1.) vezmeme příklad předchozí:

máme-li najít funkci $y(x)$, pro kterou má „být“

$$y'' + 2y' - 3y = e^{-2x}, \qquad (*)$$

asi jiná funkce, než „e^{-2x}“ tuto rovnost splnit „nemůže“ (viz tabulka derivací a pravidla derivování) –

– jen „nevíme“, „kolik“ e^{-2x} musíme vzít – tj.

řešení budeme hledat ve tvaru

$$y_p(x) = A e^{-2x}, \text{ kde } A \text{ dostaneme z toho,}$$

že má platit rovnice (*), tedy

$$(Ae^{-2x})'' + 2(Ae^{-2x})' - 3Ae^{-2x} = e^{-2x} \quad , x \in R$$

Snadno dostaneme, že

$$Ae^{-2x}\left((-2)^2 + 2(-2) - 3\right) = e^{-2x} \quad \forall x \in R$$

tj. $\quad A \cdot (-3) = 1$

a tedy $\quad \underline{A = -\frac{1}{3}}$,

tak $\underline{y_p(x) = -\frac{1}{3}e^{-2x}, x \in R}$

Je zřejmé, že metoda odhadu (pokud funguje), je hodně jednodušší!

<u>Otázka</u> – k jakým pravým stranám diferenciální rovnice

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad , p,q \in R$$

lze řešení „odhadnout"?

Zřejmě jistě k polynomům (i ty se „zachovají" v D_2) a ke kombinaci $\sin bx$, $\cos bx$ (i ty derivováním „neztratí") a také k součinům těchto funkcí (díky pravidlu pro derivaci součinu)

<u>Zkusme ještě další příklady:</u>

2. $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 + x - 2$
3. $y'' + 2y' = \cos 2x$

(2.) $y'' + 2y' - 3y = -3x^2 + x - 2$

odhad řešení : $y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$

(důležitý odhad stupně – funkce $(-3y)$ v $D_2(y)$ zachovává stupeň, derivace y', y'' stupně polynomu „snižují", tedy v tomto příkladu je stupeň řešení roven stupni „pravé strany")

pak $y_p'(x) = 2Ax + B$ a
$y_p''(x) = 2A$,

po dosazení do rovnice dostaneme, že má platit

$$2A + 2(2Ax+B) - 3(Ax^2+Bx+C) = -3x^2 + x - 2$$

tj. (srovnání koeficientů – tzv. „umění")

u x^2 :	$-3A = -3$	$\Rightarrow$	$A = 1$
u x :	$4A - 3B = 1$	$\Rightarrow$	$B = 1$
u x^0 :	$2A + 2B - 3C = -2$	$\Rightarrow$	$C = 2$

a tedy $y_p(x) = x^2 + x + 2$, $x \in R$

(3.) $y'' + 2y' = 16 \cos 2x$

odhad řešení: $y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$

(člen $B\sin 2x$ se „musí" přidat kvůli $2y'$ v def. operátoru)

pak $y_p'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$ a
$y_p''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$;

a pak dosazením do rovnice dostáváme:

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 2(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = 16\cos 2x$$

tedy (srovnáváme koeficienty u $\cos 2x$ a $\sin 2x$) dostaneme:

u $\cos 2x$: $\quad -4A + 4B = 16$

u $\sin 2x$: $\quad -4A - 4B = 0$,

a řešením této soustavy rovnic: $-8A = 16 \Rightarrow \underline{A = -2}$
a $\underline{B = 2}$)

tedy $\underline{y_p(x) = -2\cos 2x + 2\sin 2x\,,\ x \in R}$

obecné řešení dané rovnice je pak

$$\underline{y_{OR}(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} - 2\cos 2x + 2\sin 2x,}$$
$$x \in R,\ c_1, c_2 \in R$$

(neboť pro $y'' + 2y' = 0$ je fund. systém $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{-2x}$
charakteristická rovnice je: $\lambda^2 + 2\lambda = 0$, tj. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$)

④ Ale pozor – „někdy" se musí odhad „upravit" –
– příklady: (vezměme předchozí dif. rovnici)

a) $\quad y'' + 2y' = 2x + 3$

abychom po dosazení do levé strany rovnice „dostali" polynom 1. stupně, musíme volit polynom stupně 2 (neboť v operátoru „chybí" y):

(c) „špatný odhad" $\quad y_p = Ax + B$ – dosazením do rovnice:
dostáváme $\quad 0 + 2A = 2x + 3$ – „nelze splnit";

odhadujeme-li ve tvaru $y_p(x) = (Ax+B)x \; (= Ax^2+Bx)$
– už řešení dostaneme:

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A$$

a dosazením do rovnice:

$$2A + 2(2Ax + B) = 2x + 3$$

a srovnáním koeficientů u polynomů máme soustavu rovnic

$$4A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
$$2A + 2B = 3 \Rightarrow \underline{B = 1};$$

Tedy, $\underline{y_p(x) = \frac{1}{2}x^2 + x \quad , x \in R}$

b) $\underline{y'' + 2y' = 4e^{-2x}}$ (*)

„odhad" řešení $y_p(x) = Ae^{-2x}$ – „nevyjde" – dosazení: do (*)

$$(4 + 2(-2))\,Ae^{-2x} = 4e^{-2x}$$

tj. $0 = 4e^{-2x}$ – nemá řešení!

<u>Proč</u> zde odhad jako dříve nefunguje?

funkce e^{-2x} je člen fundamentálního systému řešení dané rovnice – tedy po dosazení do diferenciálního operátoru na levé straně dostaneme nulu!
Opět pomůže „oprava" (jako v a))

$$y_p(x) = A \cdot \underline{\underline{x}}\, e^{-2x}$$

Výpočet $y_p(x)$ (tj. nalezení $\underline{A}$):

$$y_p'(x) = \left(e^{-2x} - 2xe^{-2x}\right) . A ,$$

$$y_p''(x) = \left(-4e^{-2x} + 4xe^{-2x}\right) . A ,$$

a po dosazení do rovnice máme:

$$Ae^{-2x}\left[-4 + 4x + 2(1 - 2x)\right] = 4e^{-2x} ,$$

tedy odtud:

$$A\left(-2 + x(4-4)\right) = 4 \Rightarrow A = -2 ,$$

tj. $\underline{y_p(x) = -2xe^{-2x} , x \in R}$

<u>Poznámka!</u> Když se „přidá" do odhadu řešení „x" (tj. odhad $y_p(x) = A.e^{-2x}.x$), pak předané „x" má u sebe nulu, která nám dříve „odhad neumožnila")

<u>Obecný návod pro odhad partikulárního řešení diferenciální rovnice $y'' + py' + qy = f(x)$, $p, q \in R$:</u>

je-li $\underline{f(x) = e^{ax}\left(r(x)\cos bx + s(x)\sin bx\right)}$, kde $a, b \in R$, $r(x), s(x)$ polynomy,

pak $\underline{y_p(x) = x^k e^{ax}\left(R(x)\cos bx + S(x)\sin bx\right)}$,

kde $S(x)$ a $R(x)$ jsou polynomy stupně, který je roven $\max(\text{st } r(x), \text{st } s(x))$ a

$\Lambda = a + ib$ je k-násobný kořen charakteristické rovnice ($k = 0, 1, 2$)

Ještě jeden příklad:

Je dána rovnice ($p, q \in R$)

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

a nechť umíme najít partikulární řešení

(i) $y_{p_1}(x)$ rovnice $y'' + py' + qy = f_1(x)$ i

(ii) $y_{p_2}(x)$ rovnice $y'' + py' + qy = f_2(x)$;

Pak (díky linearitě diferenciálního operátoru)

je $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ řešení rovnice s pravou stranou $f_1(x) + f_2(x)$.

Příklad (početní)

$$y'' + y' = 4x - 2\sin x$$

1) řešení homogenní rovnice: $y'' + y' = 0$

charakt. rovnice: $\lambda^2 + \lambda = 0$, tj.

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -1$,

a tedy fundamentální systém řešení je

$y_1(x) = 1$, $y_2(x) = e^{-x}$

a $y_H(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in R$, $x \in R$

2) <u>partikulární řešení – odhadem</u>:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad \text{kde}$$

$$\underline{f_1(x) = 4x} \quad \text{a} \quad \underline{f_2(x) = -2\sin x}$$

<u>odhad pro $f_1(x) = 4x$</u>: $\lambda = 0$ – jednonásobný kořen ch.r. $\Rightarrow k=1$

a „odhad" $y_{p_1}(x) = x(Ax+B) \quad (= Ax^2+Bx)$

výpočtem dostaneme $\underline{y_{p_1}(x) = 2x^2 - 4x}$

($2A + 2Ax + B = 4x$ a odtud $A=2$, $B=-4$)

<u>odhad pro $f_2(x) = -2\sin x$</u>: $\lambda = i$ není kořen ch.r. $\Rightarrow$
$\Rightarrow k=0$ a
$S(x) = -2,\ P(x) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \max(\text{st } S(x), \text{st } P(x)) = 0$

a tedy odhad $\underline{y_{p_2}(x) = A\cos x + B\sin x}$

a výpočet A, B (dosazení do rovnice)

$$-A\cos x - B\sin x + (-A\sin x + B\cos x) = -2\sin x$$

tj.
$$\left.\begin{array}{lll} \text{u } \sin x: & -A - B & = -2 \\ \text{u } \cos x: & -A + B & = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{A=1}, \ \underline{B=1}$$

a tedy $y_{p_2}(x) = \cos x + \sin x, \ x \in R$.

Pak $\underline{y_p(x) = 2x^2 - 4x + \cos x + \sin x, \ x \in R}$